ФМИ УФА 2017-2018 - Доклад

Интеграли на Риман-Стилтес за непрекъснати функции спрямо функции с ограничена вариация

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

18 януари 2018

Използвани са следните означения:

- $\gamma : a = z_0 < \ldots < z_n = b$ - разбиване на интервала $[a, b]$
- $|\gamma| = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(x_i - x_{i-1})$ - диаметър на разбиването γ
- $\bigvee\limits_{\gamma} g$ - вариация на функцията g върху разбиването $\gamma : a = z_0 < \ldots < z_n = b$:

$$\bigvee_{\gamma} g = \sum_{i=1}^{n} |g(z_i) - g(z_{i-1})|,$$

- $\bigvee\limits_{a}^{b} g$ - вариация на функцията g върху $[a, b]$:

$$\bigvee_{a}^{b} g = \sup_{\gamma \in \Gamma} \bigvee_{\gamma} g,$$

  където Γ е множеството на всички разбивания от вида $\gamma : a = z_0 < \ldots < z_n = b$.

- $S_g(f, \gamma, \gamma_i)$ - риманова сума за функции f и g и разбиване $\gamma : a = z_0 < \ldots < z_n = b$ с междинни точки $\gamma_i \in [z_{i-1}, z_i]$:

$$S_g(f, \gamma, \gamma_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)[g(z_i) - g(z_{i-1})]$$

- $\int_a^b f dg$ - интеграл на Риман-Стилтес за функцията f спрямо функцията g:

$$L = \int_a^b f dg,$$

ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, за което $|L - S_g(f, \gamma, \gamma_i)| < \varepsilon$, където $\gamma : a = z_0 < \ldots < z_n = b$ е произволно разбиване на $[a, b]$ с диаметър $|\gamma| < \delta$ и $\gamma_i \in [z_{i-1}, z_i]$ са съответните междинни точки.

- $C[a, b]$ - множеството на всички непрекъснати в интервала $[a, b]$ функции
- $BV[a, b]$ - множеството на всички функции с ограничена вариация в $[a, b]$

Теорема 1 (Интегруемост)**.** *Нека функциите f и g са определени в интервала $[a, b]$, f е непрекъсната, а g е с ограничена вариация. Тогава f е интегруема спрямо g в интервала $[a, b]$.*

Доказателство. Фиксираме функциите $f \in C[a, b]$ и $g \in BV[a, b]$. За да докажем теоремата е достатъчно да се убедим, че условието на Коши е изпълнено, тоест че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всеки две разбивания α и β, за които $|\alpha| < \delta$ и $|\beta| < \delta$, имаме $|S_\alpha - S_\beta| < \varepsilon$.

Ще вкараме допълнителна положителна константа, която ще нагласим накрая. Нека $\tau > 0$. Понеже f е непрекъсната в компакт, то тя е равномерно непрекъсната и съществува такова $\delta > 0$, за което $|f(x) - f(y)| < \tau$ при $|x - y| < \delta$.

Нека са дадени две разбивания на $[a, b]$:

$$\alpha : a = x_0 < \ldots < x_n = b \text{ и } \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ са междинни точки,}$$

$$\beta : a = y_0 < \ldots < y_m = b \text{ и } \beta_i \in [y_{i-1}, y_i] \text{ са междинни точки,}$$

за които $|\alpha| < \delta$ и $|\beta| < \delta$ и нека $\gamma = \alpha \cup \beta : a = z_0 < \ldots < z_p = b$ е обединението им. Нека $\gamma_i \in [z_{i-1}, z_i]$ са произволни междинни точки за γ и нека $\sigma(i)$ е функция, която съпоставя на индекс от α съответния индекс от γ. Очевидно

$$S_g(f, \gamma, \gamma_i) = \sum_{i=1}^{p} f(\gamma_i)[g(z_i) - g(z_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)} f(\gamma_j)[g(z_j) - g(z_{j-1})]$$

и

$$S_g(f, \gamma, \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)[g(z_{\sigma(i)}) - g(z_{\sigma(i-1)})] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)} f(\alpha_i)[g(z_j) - g(z_{j-1})].$$

Следователно

$$|S_g(f, \gamma, \gamma_i) - S_g(f, \gamma, \alpha_i)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)} [f(\alpha_i) - f(\gamma_j)][g(z_j) - g(z_{j-1})] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=\sigma(i-1)+1}^{\sigma(i)} |f(\alpha_i) - f(\gamma_j)||g(z_j) - g(z_{j-1})| \leq \tau \sum_{i=1}^{p} |g(z_i) - g(z_{i-1})| \leq \tau \bigvee_a^b g.$$

Аналогично получаваме и $|S_g(f,\gamma,\beta_i) - S_g(f,\gamma,\gamma_i)| \le \tau \operatorname{V}_a^b g$ и

$$|S_g(f,\gamma,\alpha_i) - S_g(f,\gamma,\beta_i)| = |S_g(f,\gamma,\alpha_i) - S_g(f,\gamma,\gamma_i) + S_g(f,\gamma,\gamma_i) - S_g(f,\gamma,\beta_i)| \le$$
$$\le |S_g(f,\gamma,\alpha_i) - S_g(f,\gamma,\gamma_i)| + |S_g(f,\gamma,\gamma_i) - S_g(f,\gamma,\beta_i)| = 2\tau \operatorname*{V}_a^b g.$$

За да довършим доказателството, трябва да фиксираме $\tau < \dfrac{\varepsilon}{2 \operatorname{V}_a^b g}$. □

Теорема 2 (Оценка)**.** *Нека функцията f е ограничена в $[a,b]$, а функцията g има ограничена вариация в този интервал. Ако f е интегруема спрямо g, в този интервал, то*

$$\left| \int_a^b f dg \right| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \operatorname*{V}_a^b g.$$

Доказателство. Нека $\gamma : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ е произволно разбиване на $[a,b]$ и $\gamma_i \in [x_{i-1}, x_i]$ са междинни точки. Образуваме римановата сума

$$|S_\gamma| = \left| \sum_{i=1}^p f(\gamma_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \right| \le \sum_{i=1}^p \Big| f(\gamma_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \Big| =$$
$$= \sum_{i=1}^p |f(\gamma_i)||g(x_i) - g(x_{i-1})| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| V_a^b g.$$

Теоремата е доказана. □

Теорема 3 (Рис за банахови пространства)**.** *За всеки непрекъснат линеен функционал $l : C[a,b] \to \mathbb{R}$ съществува функция $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ с ограничена вариация, за която*

$$l(f) = \int_a^b f dg \tag{1}$$

за всяко $f \in C[a,b]$ и освен това $\|l(f)\| = \operatorname{V}_a^b f$.

Доказателство. Нека $(B[a,b], \|.\|_\infty)$ е пространството от всички ограничени върху интервала $[a,b]$ функции. $(C[a,b], \|.\|_\infty)$ очевидно е подпространство и, съгласно теоремата на Хан-Банах, функционалът l има непрекъснато продължение върху $B[a,b]$ със същата норма. Този функционал също ще означаваме с l.

Ще определим $g \in B[a,b]$ с $g(x) = l(\chi_{ax})$, където

$$\chi_{xy}(z) = \begin{cases} 1, & x \le z < y \text{ или } z = y = b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Непосредствено се проверява, че

$$\chi_{ay} - \chi_{ax} = \chi_{xy} \tag{2}$$

за $a \leq x < y \leq b$.

Ще покажем, че g е функция с ограничена вариация. За целта ще разгледаме разбиването $\gamma : a = z_0 < \ldots < z_n$. Вариацията на g за γ е

$$\operatorname*{V}_{\gamma} g = \sum_{i=1}^{n} |g(z_i) - g(z_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [z(x_i) - z(x_{i-1})],$$

където ε_i е 1 или -1.

От (2) получаваме

$$g(z_i) - g(z_{i-1}) = l(\chi_{az_i} - \chi_{az_i}) = l(\chi_{z_{i-1}z_i}) \tag{3}$$

и следователно

$$\operatorname*{V}_{\gamma} g = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i l(\chi_{z_{i-1}z_i}) = l\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \chi_{z_{i-1}z_i}\right).$$

$\chi_{z_{i-1}z_i}(z) = 1$ точно в един от интервалите от разбиването γ. Затова

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \chi_{z_{i-1}z_i} \right\| = 1$$

и

$$\operatorname*{V}_{\gamma} g = \leq \|l\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \chi_{z_{i-1}z_i} \right\| = \|l\|$$

за всяко разбиване γ на $[a, b]$. Следователно функцията g има ограничена вариация и е изпълнено

$$\operatorname*{V}_{a}^{b} g \leq \|l\|. \tag{4}$$

Сега нека $f \in C[a, b]$ и $\varepsilon > 0$. Тъй като f е равномерно непрекъсната, то съществува $\delta > 0$ такова, че от $|x - y| < \delta$ да следва $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Нека $\gamma : a = z_0 < \ldots < z_n = b$ е произволно разбиване с диаметър $|\gamma| < \delta$ и междинни точки $\gamma_i \in [z_{i-1}, z_i]$.

За всяко $x \in [a, b]$ е в сила неравенството

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i) \chi_{z_{i-1}z_i}(x) \right| < \varepsilon,$$

понеже x и междинната стойност γ_i от единственото ненулево събираемо са точки в един и същ интервал от γ, а значи $|x - \gamma_i| < \delta$. Следователно и супремум нормата ще бъде по-малка или равна на ε и

$$\left|l(f) - l\left(\sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\chi_{z_{i-1}z_i}\right)\right| = \left|l\left(f - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\chi_{z_{i-1}z_i}\right)\right| \leq \|l\| \left\|f - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\chi_{z_{i-1}z_i}\right\| \leq \varepsilon\|l\|.$$

От (3) следва

$$\left|l(f) - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i) l(\chi_{z_{i-1}z_i})\right| = \left|l(f) - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)[g(z_i) - g(z_{i-1})]\right| \leq \varepsilon\|l\|$$

за всяко разбиване γ с $|\gamma| < \delta$ и за всякакви междинни точки. Понеже l е фиксирано, а ε - произволно, то е изпълнено условието (1):

$$l(f) = \int_a^b f dg.$$

Сега използваме теорема 2, за да оценим нормата на l:

$$\|l\| = \sup_{\|f\|=1} \int_a^b f dg \leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, g. \tag{5}$$

От (4) и (5) получаваме $\|l\| = \mathrm{V}_a^b\, g$, което завършва доказателството на теоремата. $\square$

Теорема 4. *Нека* $\alpha \in BV[a,b]$ *и*

$$\beta(x) = \begin{cases} a, & x = a \\ b, & x = b \\ \alpha(x+) = \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} \alpha(y), & a < x < b \end{cases}.$$

Тогава $\beta \in BV[a,b]$*,* β *е непрекъсната отдясно и*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\beta,$$

където $f \in C[a,b]$*.*

Доказателство (β е функция с ограничена вариация). Нека $\gamma : a = z_0 < \ldots < z_n = b$ е произволно разбиване на $[a,b]$. Ще докажем, че

$$\underset{\gamma}{\mathrm{V}}\, \beta \leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, \alpha.$$

Заместваме β в горната сума

$$\mathop{\mathrm{V}}_{\gamma} \beta = \sum_{i=1}^{n} |\beta(z_i) - \beta(z_{i-1})| =$$

$$= |\alpha(z_1+) - \alpha(a)| + \sum_{i=2}^{n-1} |\alpha(z_i+) - \alpha(z_{i-1}+)| + |\alpha(b) - \alpha(z_{n-1}+)|.$$

Нека $\tau > 0$. За $i = 1, \dots, n-1$ ще дефинираме спомагателните точки $\hat{z}_i$, така че $z_i < \hat{z}_i < z_{i+1}$ и $|\alpha(\hat{z}_i) - \alpha(z_i+)| < \tau$. Можем да изберем такава точка, понеже поне една редица клони към $\alpha(z_i+)$ отдясно. Освен това полагаме $\hat{z}_0 = z_0 = a$ и $\hat{z}_n = z_n = b$. Лесно се вижда, че всяко $\hat{z}_i$ приближава z_i отдясно и при граничен преход с $\lim_{\tau \to 0} \hat{z}_i = z_i+$.

Сега оценяваме всяко събираемо от горната сума:

За $i = 1$

$$|\alpha(z_1+) - \alpha(a)| = |\alpha(z_1+) - \alpha(\hat{z}_1) + \alpha(\hat{z}_1) - \alpha(a)| \le$$
$$\le |\alpha(z_1+) - \alpha(\hat{z}_1)| + |\alpha(\hat{z}_1) - \alpha(a)| < \tau + |\alpha(\hat{z}_1) - \alpha(a)|.$$

За $2 \le i \le n-1$

$$|\alpha(z_i+) - \alpha(z_{i-1}+)| \le |\alpha(z_i+) - \alpha(\hat{z}_i)| + |\alpha(\hat{z}_i) - \alpha(z_{i-1}+)| \le$$
$$\le \tau + |\alpha(\hat{z}_i) - \alpha(z_{i-1}+)| \le \tau + |\alpha(\hat{z}_i) - \alpha(\hat{z}_{i-1})| + |\alpha(\hat{z}_{i-1}) - \alpha(z_{i-1}+)| <$$
$$< 2\tau + |\alpha(\hat{z}_i) - \alpha(\hat{z}_{i-1})|$$

За $i = n$

$$|\alpha(b) - \alpha(z_{n-1}+)| \le |\alpha(b) - \alpha(\hat{z}_{n-1})| + |\alpha(\hat{z}_{n-1}) - \alpha(z_{n-1}+)| < |\alpha(b) - \alpha(\hat{z}_{n-1})| + \tau.$$

В крайна сметка:

$$\mathop{\mathrm{V}}_{\gamma} \beta = |\alpha(z_1+) - \alpha(a)| + \sum_{i=2}^{n-1} |\alpha(z_i+) - \alpha(z_{i-1}+)| + |\alpha(b) - \alpha(z_{n-1}+)| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} |\alpha(\hat{z}_i) - \alpha(\hat{z}_{i-1})| + 2(n-1)\tau \le \mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b} \alpha + 2(n-1)\tau.$$

При $\tau \to 0$ очевидно

$$\mathop{\mathrm{V}}_{\gamma} \beta \le \mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b} \alpha.$$

$\square$

Доказателство (β е непрекъсната отдясно). Ще докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ и за всяко $x \in [a, b)$ съществува $\delta > 0$ такова, че за положителни $h < \delta$

$$|\beta(x+h) - \beta(x)| < \varepsilon.$$

Да забележим, че

$$\beta(x+) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \beta(x+h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \lim_{\substack{\gamma \to 0 \\ \gamma>0}} \alpha(x+\gamma+h) = \alpha(x+) = \beta(x).$$

Следователно, съществува $\tau > 0$ такова, че за всяко $x \in [a, b)$ и за положителни $t < \tau$

$$|\beta(x+t) - \beta(x)| < \varepsilon.$$

Достатъчно е да изберем $\delta = \tau$. $\square$